



החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ד - שלב שני

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



כ"א בשבט תשע"ד

בס"ד

משתתפת יקרה

אנו מברכים אותך על עלייתך לשלב השני של האולפניאדה המתמטית, ומאחלים לך הצלחה בהמשך התחרות. בטרם תפני לשאלות, נא מלאי את הפרטים שבעמוד זה.

שם המשתתפת: _____

לבת שרות לאומי:

לתלמידת בית ספר: _____

מקום השרות: _____

הכיתה: _____

בוגרת בית הספר: _____

בית הספר: _____

הכתובת האישית: _____

מספר הטלפון: _____ מספר הטלפון הנייד: _____

כתובת דוא"ל: _____

שאלון השלב השני מורכב משני חלקים.

כשתסיימי לפתור את החלק הראשון, נא חזרי לעמוד זה ורכזי את תשובותייך בטבלה הבאה. לכל שאלה, סמני ב-X את התשובה שבחרת (אם תסומן יותר מתשובה אחת, השאלה תיפסל).

| 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| א. | א. | א. | א. | א. | א. | א. | א. | א. | א. | א. | א. |
| ב. | ב. | ב. | ב. | ב. | ב. | ב. | ב. | ב. | ב. | ב. | ב. |
| ג. | ג. | ג. | ג. | ג. | ג. | ג. | ג. | ג. | ג. | ג. | ג. |
| ד. | ד. | ד. | ד. | ד. | ד. | ד. | ד. | ד. | ד. | ד. | ד. |
| ה. | ה. | ה. | ה. | ה. | ה. | ה. | ה. | ה. | ה. | ה. | ה. |

את התשובות לחלק השני רשמי בעמודים המתאימים.

בהצלחה רבה,
צוות האולפניאדה



החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ד - שלב שני

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



השאלון שלפנייך מורכב משני חלקים.
בחלק הראשון 12 שאלות, לכל אחת מהן מוצעות 5 תשובות שרק אחת מהן נכונה. קראי בעיון את השאלות, פתרי אותן, וסמני בעיגול את התשובה הנכונה.
בחלק השני שתי שאלות. פתרי אותן ורשמי פתרון מנומק. גם תשובות חלקיות תתקבלנה.
הזמן הכולל לפתרון שני החלקים הוא שלוש שעות. השימוש במחשבון מותר.

בהצלחה

1 בכל אחת ממשבצות הלוח מסדר 5×5 שלפנייך יש לכתוב את אחת הספרות 1,2,3,4,5, כך שבכל שורה, עמודה או תחום המוקף בקו מודגש, מופיעות כל חמש הספרות. אחדות מהמשבצות כבר ממולאות. איזה מספר יש לרשום במשבצת המסומנת בצהוב?

| | | | | |
|--|---|---|---|---|
| | | | 2 | |
| | 3 | | | |
| | | | 5 | |
| | | 1 | | 4 |
| | | | | |

1.א. 2.ב. 3.ג. 4.ד. 5.ה.

2 נעמה בחרה מספר טבעי כלשהו. אפרת כפלה אותו ב-4 או ב-5, שירה הפחיתה מן התוצאה שקיבלה אפרת 4 או 5. למספר זה חוסיפה בילי 4 או 5, והגיעה לתוצאה: 5774 (התשע"ד).
מהו סכום ספרותיו של המספר שבחרה נעמה?

10.א. 11.ב. 12.ג. 13.ד. ה. אין די נתונים לחשב את סכום הספרות.



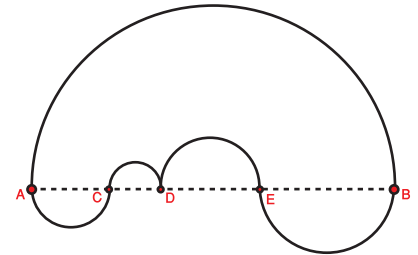
החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ד - שלב שני

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



3 השרטוט הבא בנוי מחמישה חצאי מעגלים:



חצי מעגל עליון AB , ועוד ארבעה חצאי מעגלים קטנים. ניתן להגיע מ- A ל- B לאורך הקשת העליונה (הדרך העליונה), או לאורך ארבע הקשתות הקצרות התחתונות (הדרך התחתונה). מה היחס בין אורכי שתי הדרכים?

- א. הדרך העליונה ארוכה פי שניים מהדרך התחתונה
- ב. הדרך העליונה ארוכה פי $\pi/2$ מהדרך התחתונה
- ג. שתי הדרכים שוות באורך
- ד. הדרך התחתונה ארוכה פי $\pi/2$ מהדרך העליונה
- ה. חסרים נתונים לחישוב יחס זה

4 כמה מספרים תלת ספרתיים יש, שהם פי 34 מסכום ספרותיהם?

- א. 10
- ב. 8
- ג. 6
- ד. 4
- ה. 0

5 אילה ודינה נכנסות לחדר ובו שלוש נורות כבויים, המחוברות כל אחת למתג אחר. אילה בוחרת את אחד המתגים ומדליקה אותו. אחריה דינה בוחרת את אחד משלושת המתגים, ומשנה את מצבו (מדלוק לכבוי או מכבוי לדלוק). מכאן ואילך, כל אחת בתורה משנה את המצב של אחד משלושת המתגים. לאחר עשרה תורות (חמישה לאילה וחמישה לדינה), איזו מן הטענות הבאות **בהכרח** נכונה?

- א. כל המנורות דלוקות
- ב. כל המנורות כבויים
- ג. יש לפחות מנורה אחת דלוקה ומנורה אחת כבויה
- ד. לא ייתכן שכל המנורות דלוקות
- ה. לא ייתכן שכל המנורות כבויים



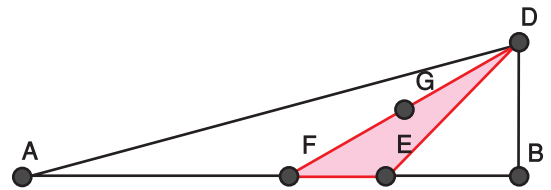
החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ד - שלב שני

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



6 חלקת הגינה המשולשת שליד ביתי חולקה על ידי הגנן לשלושה חלקים כמתואר בציור, ובכל חלקה נשתלו שתילים שונים. במשולש הפנימי הצבוע בוורוד נשתלו פרחים. במשולש מימין נשתלו ירקות ובמשולש השמאלי נטעו עצים. השרטוט הבא נותר מרישומי של האדריכל המתכנן, ומהערותיו ניתן ללמוד כי: המשולש ABD הוא ישר זווית. $DB=DG=GF=EB$, וכי המרחק בין A ל F הוא פעמיים המרחק בין B ל G.



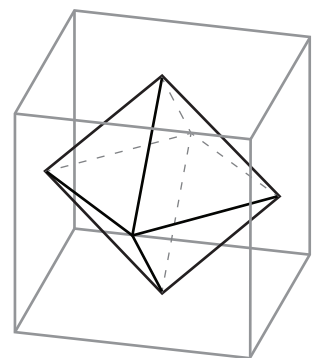
היחס בין שטח משולש הפרחים לשטח הגינה כולה הוא:

- א. $1/5$ ב. $1/4$ ג. $\frac{9-\sqrt{3}}{6}$ ד. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ה. $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+2}$

7 המספר N מורכב רק מן הספרות 1,2,3,4,5. חלק מהן מופיעות אולי יותר מפעם אחת, או אינן מופיעות כלל. אם סכום ספרותיו של N הוא 36, וגם סכום ספרות המספר $2N$ הוא 36, אז כמה פעמים מכיל המספר N את הספרה 5?

- א. 0 ב. 1 ג. 2 ד. 3 ה. 4

8 מחברים את ששת מרכזי הדפנות של קובייה ויוצרים גוף משוכלל הנקרא אוקטאדר, כפי שמתואר בציור שלהלן.



אם האורך של צלע הקובייה הוא ס"מ אחד, אז נפח האוקטאדר בסמ"ק הוא:

- א. $1/8$ ב. $1/6$ ג. $1/4$ ד. $1/3$ ה. $1/2$



החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ד - שלב שני

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



9 תרגיל הכפל שלפניך משתמש בכל 9 הספרות: 1, 2, 3, ..., 9. הספרות מוצפנות על ידי כוכבים.

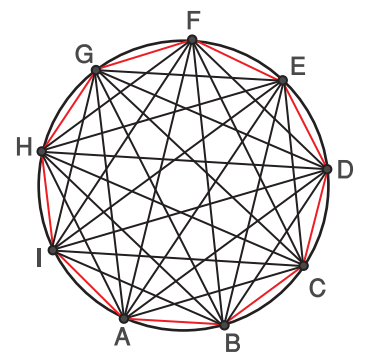
$$\begin{array}{r}
 * * * \\
 X \\
 * * \\
 \hline
 * * * *
 \end{array}$$

נתון כי המספרים הכתובים בכל שורה מתחלקים ב-9. בנוסף, בשורת התוצאה יש ארבע ספרות עוקבות, לאו דווקא לפי סדרן.

סכום שלוש ספרות האחדות של המספרים שמוצפנות בכוכבים האדומים הוא:

- א. 21 ב. 20 ג. 19 ד. 18 ה. 17

10 נתונות 9 נקודות על מעגל היוצרות מצולע משוכלל. מעבירים את כל מיתרי המעגל שקצותיהם הם שניים מקדוקדי המתושע המשוכלל כמתואר בציור. מיתרים רבים נחתכים בפנים המעגל.



מספר נקודות החיתוך של המיתרים בפנים המעגל הוא:

- א. 252 ב. 128 ג. 126 ד. 120 ה. 112



החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ד - שלב שני

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



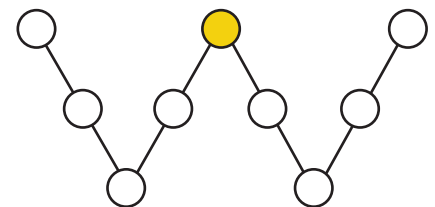
11 בכל יום זוגי תלמי דובר רק אמת, בימים אי-זוגיים הוא רק משקר. היום אמר תלמי ארבעה מתוך חמשת המשפטים הבאים:

1. מספר אחיי הגדולים ממני שווה למספר אחיי הקטנים ממני
2. היום יום שלישי
3. שלושה מאחיי קבלו 10 במתמטיקה
4. המספר 11011 אינו ראשוני
5. יש לי מספר ראשוני של אחים

איזה משפט תלמי לא אמר היום?

- א. 1 ב. 2 ג. 3 ד. 4 ה. 5

12 מציבים את המספרים 1,2,3 . . . 9 בתוך עיגולי צורת ה-W שלפניך, מספר אחד בכל עיגול, באופן שסכומי שלושת המספרים המוצבים בכל אחת מארבע צלעות ה-W שווים. אם הסכום השווה הוא **מרבי**, מהי הספרה המוצבת במשבצת הצהובה?



- א. 9 ב. 8 ג. 7 ד. 6 ה. לא ניתן לדעת



החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ד - שלב שני

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls

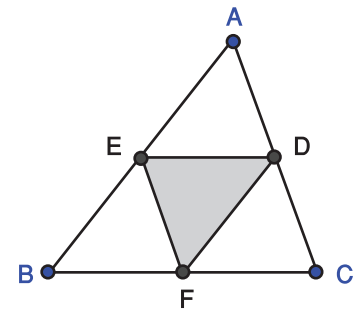


חלק שני

בחלק זה שתי שאלות. פתרי אותן, ורשמי פתרון מנומק. במקום שדרושה הוכחה, ספקי אותה. גם תשובות חלקיות תקבלנה ניקוד. את תשובותיך מלאי בהמשך הדף בו מופיעה השאלה. אם המקום אינו מספיק, המשיכי בצידו השני של הדף.

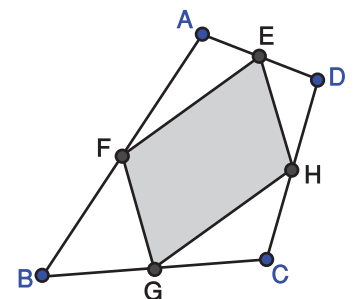
מצולע האמצעים 13

א. נתון משולש ABC כלשהו. מחברים את אמצעי הצלעות של המשולש ומקבלים משולש DEF , כמתואר בציור.



הוכיחי כי שטח משולש האמצעים DEF הוא רבע משטח המשולש המקורי ABC .

ב. נתון מרובע כלשהו $ABCD$. מחברים את אמצעי הצלעות הסמוכות של המרובע, ומקבלים מרובע חדש $EFGH$.



הוכיחי מרובע האמצעים $EFGH$ הוא מקבילית, ששטחה מחצית שטח המרובע $ABCD$.



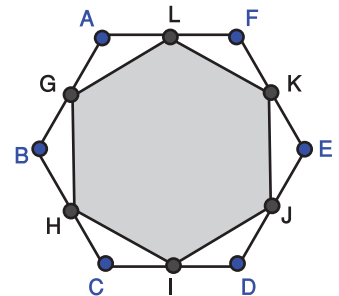
החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ד - שלב שני

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



ג. נתון משושה משוכלל ABCDEF. מחברים את אמצעי הצלעות הסמוכות שלו.

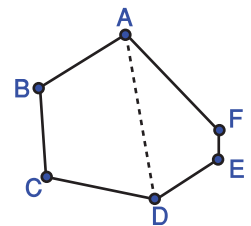


הוכיח כי שטח משושה האמצעים GHIJKL הוא שלושה רבעים משטח המשושה ABCDEF.

ד. הוכיח כי במצולע משוכלל מסדר n יחס שטח מצולע האמצעים שלו לשטח המצולע המקורי הוא

$$\cos^2\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

ה. הראינו כי במשושה משוכלל שטח משושה האמצעים הוא שלושה רבעים משטח המשושה המקורי. נתבונן עתה במשושה קמור לאו דוקא משוכלל (משושה קמור הוא משושה שכל זוויותיו הפנימיות קטנות מ- 180°). הסתמכי על סעיף ב', והוכיח כי שטח משושה האמצעים גדול מחצי שטח המשושה המקורי.

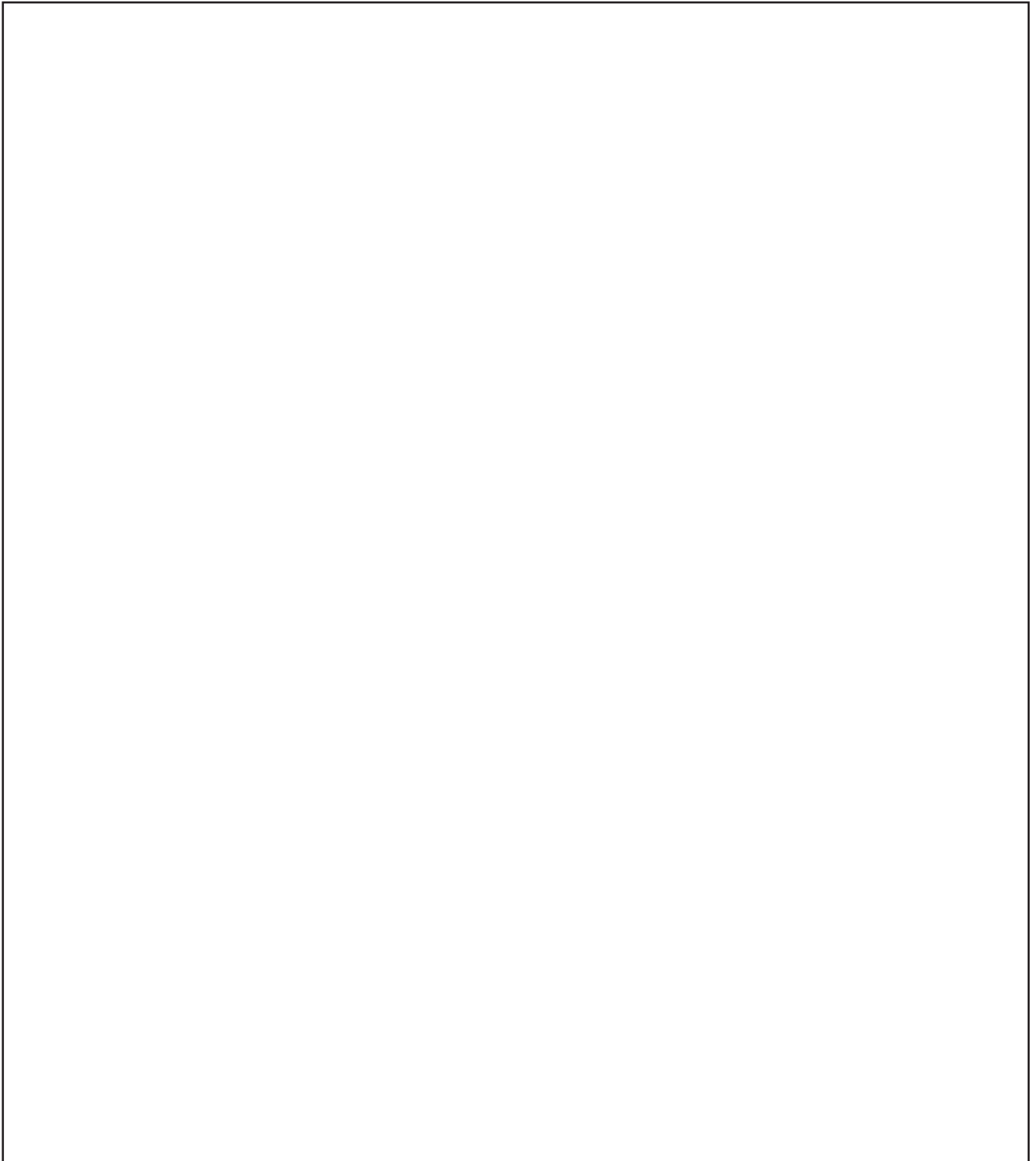




החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ד - שלב שני

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls





החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ד - שלב שני

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



14 אכלת אותה!

נתונה שורה של n ריבועי שוקולד.

בנימין ונועם, שני ילדים חכמים, משחקים במשחק הבא: בנימין פותח, והוא בוצע את השורה באחד מקווי המשבצות, ויוצר שני חלקים (לאו דווקא שווים), שבכל אחד מהם מספר שלם של משבצות. בנימין אוכל אז את החלק הקטן משני החלקים שנוצרו (אם שני החלקים שווים, הוא אוכל אחד מהם), והמשחק עובר לנועם. נועם פועל באופן דומה: הוא בוצע את השורה שנותרה לשני חלקים, ואוכל את החלק הקטן מביניהם (אם שני החלקים שווים, הוא אוכל אחד מהם), וכך ממשיכים לסירוגין. השחקן הראשון שאוכל בתורו משבצת שוקולד אחת בלבד - מפסיד.

אם בתחילת המשחק היו שתי משבצות בשורה, מפסיד בנימין, כי כשיחתוך את השורה לשניים, ייאלץ לאכול משבצת שוקולד אחת בלבד!

א. מי משני השחקנים מנצח, אם בתחילת המשחק השורה היא בת שלוש משבצות?

ב. מי משני השחקנים מנצח, אם בתחילת המשחק שורת השוקולד מכילה ארבע משבצות?

בנימין נמצא ב"מצב מפסיד" אם מה שיעשה בתורו, הוא **לא יוכל למנוע** מנועם ניצחון עתידי. בנימין נמצא ב"מצב מנצח" אם הוא **יכול** (כשישחק בחכמה) להביא את נועם למצב מפסיד. אם המשחק מתחיל עם שתי משבצות בלבד, בנימין נמצא במצב מפסיד. **2** לפיכך, נקרא "מצב מפסיד".

ג. מלאי את הטבלה הבאה (W - למצב מנצח, L - למצב מפסיד):

| n | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|--------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| מצבו של השחקן שתורו לשחק | L | | | | | | | |

ד. הוכיחי כי אם n הוא מצב מפסיד, אז $n+2$ הוא מצב מנצח.

ה. הוכיחי כי אם n ו- $n+1$ הם מצבים מפסידים, אז $2n+2, n+3, \dots, n+2$ הם מצבים מנצחים. מהו המצב המפסיד הבא? מה המצב המפסיד שבא אחריו?

ו. הוכיחי כי פרט לשני המצבים המפסידים הראשונים, ספרת האחדות של כל המצבים המפסידים האחרים מסתיימת ב-7 או ב-8.

ז. מצאי נוסחה התלויה ב- n . המתארת בדיוק את כל המצבים המפסידים במשחק.



החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ד - שלב שני

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls

