



החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ו - שלב שני

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



כ' באדר א' תשע"ו

בס"ד

משתתפת יקרה

אנו מברכים אותך על עלייתך לשלב השני של האולפניאדה המתמטית, ומאחלים לך הצלחה בהמשך התחרות. בטרם תפני לשאלות, נא מלאי את הפרטים שבעמוד זה.

שם משפחה _____ שם פרטי _____

| | |
|------------------|-----------------------|
| לתלמידת בית ספר: | לבת שרות לאומי: |
| הכיתה: _____ | מקום השרות: _____ |
| בית הספר: _____ | בוגרת בית הספר: _____ |
| שם רכזת: _____ | |

הכתובת האישית: _____ עיר: _____

מספר הטלפון: _____ מספר הטלפון הנייד: _____

כתובת דוא"ל: _____

שאלון השלב השני מורכב משני חלקים.

כשתסיימי לפתור את החלק הראשון, נא חזרי לעמוד זה ורכזי את תשובותיך בטבלה הבאה. לכל שאלה, סמני ב-X את התשובה שבחרת (אם תסומן יותר מתשובה אחת, השאלה תיפסל).

| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| א.א. | א.א. | א.א. | א.א. | א.א. | א.א. | א.א. | א.א. | א.א. | א.א. |
| ב.ב. | ב.ב. | ב.ב. | ב.ב. | ב.ב. | ב.ב. | ב.ב. | ב.ב. | ב.ב. | ב.ב. |
| ג.ג. | ג.ג. | ג.ג. | ג.ג. | ג.ג. | ג.ג. | ג.ג. | ג.ג. | ג.ג. | ג.ג. |
| ד.ד. | ד.ד. | ד.ד. | ד.ד. | ד.ד. | ד.ד. | ד.ד. | ד.ד. | ד.ד. | ד.ד. |
| ה.ה. | ה.ה. | ה.ה. | ה.ה. | ה.ה. | ה.ה. | ה.ה. | ה.ה. | ה.ה. | ה.ה. |

את התשובות לחלק השני רשמי בעמודים המתאימים.

בהצלחה רבה,
צוות האולפניאדה



החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ו - שלב שני

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



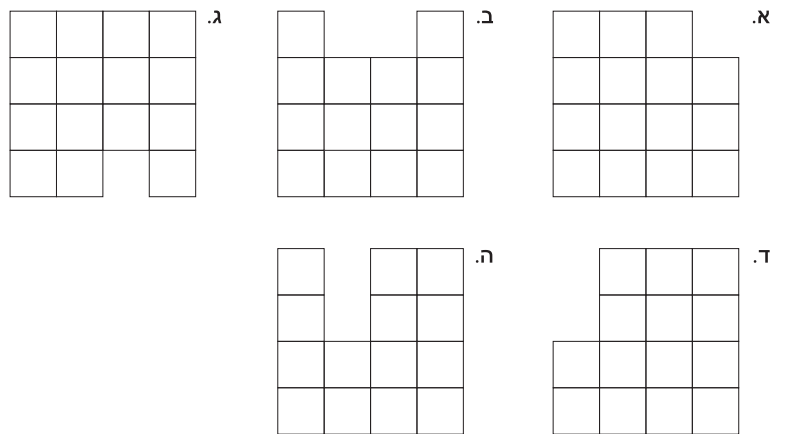
השאלון שלפנייך מורכב משני חלקים.

בחלק הראשון 10 שאלות, לכל אחת מהן מוצעות 5 תשובות שרק אחת מהן נכונה. קראי בעיון את השאלות, ופתרי אותן.

בחלק השני שתי שאלות. פתרי אותן ורשמי פתרון מנומק. גם תשובות חלקיות תתקבלנה. הזמן הכולל לפתרון שני החלקים הוא שלוש שעות ועשרים דקות. השימוש במחשבון מותר.

בהצלחה

1 בכל אחד מחמשת האיורים שלפנייך ריבועים מגדלים שונים.



באיזה איור יש 23 ריבועים בדיוק?

א. א ב. ב ג. ג ד. ד ה. ה

2 בעבור כמה ערכי p , שלושת המספרים p , $p+2$, $p^2+6p-16$ כולם ראשוניים?

א. 0 ב. 1 ג. 2 ד. 3 ה. אין סוף



החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ו - שלב שני

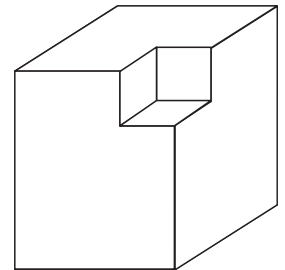
Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



3 בגתן ותרש תאומים כמעט זהים הם, אלא שבגתן משקר בימים ראשון שלישי וחמישי, וביתר ימות השבוע הוא דובר אמת, ואילו תרש משקר בשני, רביעי ושישי, וביתר הימים דובר אמת. באחד הימים פגשתי אותם.
אחד מהם אמר לי: "היום לא שבת".
ואילו האחר אמר לי: "היום לא יום רביעי".
באיזה יום התרחשה הפגישה?

א. ביום ראשון ב. ביום שלישי ג. ביום רביעי ד. ביום שישי ה. בשבת

4 מתיבה שנפחה הוא 30 סמ"ק, ושכל ממדיה מספרים טבעיים גדולים מ-1, חתכו קובייה, שדפנותיה מקבילות לדפנות התיבה, כמתואר בציור.



מהו שטח הפנים בסמ"ר של הגוף הנותר?

א. 62 ב. 59 ג. 56 ד. 29 ה. אין די נתונים



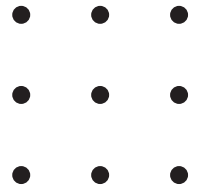
החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ו - שלב שני

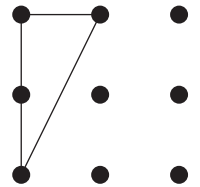
Ulpianiada - The Math Contest for Jewish Girls



5 נתון שריג של 3×3 נקודות (המרחק המאוזן והמאונך בין נקודות סמוכות הוא גודל קבוע כבציון).



נתבונן במשולשים שריגיים ששלושת קדקודיהם הן נקודות השריג, למשל:



כמה משולשים שריגיים שאף שניים מהם אינם חופפים, ניתן לשרטט בשריג כזה?

- א. 5 ב. 6 ג. 7 ד. 8 ה. 9

6 בעבור כמה מספרים טבעיים n , $1 \leq n \leq 20$, המספר $n^{5776} + n^{5777}$ מתחלק ב-5?

- א. 4 ב. 5 ג. 6 ד. 7 ה. 8

7 בתרגיל הכפל הבא הושמטו הספרות האי-זוגיות, ובכל מקום של ספרה אי-זוגית הוצבה האות א. נותרו הספרות הזוגיות.

$$\begin{array}{r} \text{א א} \\ \times \text{א א} \\ \hline 2 \text{א א} \\ \text{א א א} \\ \hline 4 \text{א 8 א} \end{array}$$

סכום 11 הספרות האי-זוגיות החסרות הוא:

- א. 57 ב. 59 ג. 61 ד. 63 ה. 65



החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ו - שלב שני

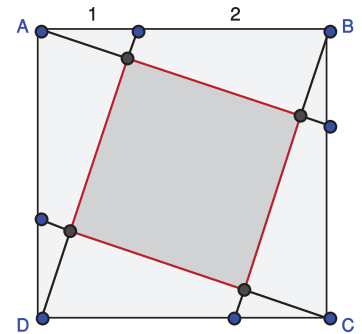
Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



8 ספרת האחדות של הסכום: $1^{13} + 2^{13} + \dots + 5776^{13}$ היא:

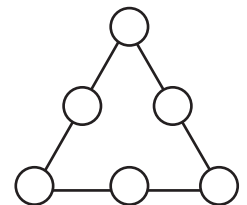
- א. 0
- ב. 2
- ג. 3
- ד. 6
- ה. 8

9 מכל אחד מקדוקדי ריבוע ABCD שצלעו 3, העבירו קטעים החותכים את אחת הצלעות הנגדיות ביחס של 1 ל-2 (ראי ציור). מהו השטח של הצורה המרכזית הצבועה באפור?



- א. 6
- ב. $\frac{4\sqrt{10}}{3}$
- ג. 4.5
- ד. $\sqrt{10}$
- ה. 3.6

10 בכל אחד מהעיגולים בשרטוט שלפניך רושמים מספר ראשוני, כך שכל המספרים שונים, וכך ששלושת סכומי המספרים בכל צלע של המשולש שווים.



הסכום המזערי האפשרי של מספרים בצלע הוא:

- א. 29
- ב. 31
- ג. 33
- ד. 35
- ה. 39



החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ז - שלב שני

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



חלק שני

בחלק זה שתי שאלות. פתרי אותן, ורשמי פתרון מנומק. במקום שדרושה הוכחה, ספקי אותה. גם תשובות חלקיות תקבלנה ניקוד. את תשובותיך מלאי בהמשך הדף בו מופיעה השאלה או בדפים הנוספים. רשמי את שמך בתחתית כל עמוד, במקום המיועד לכך. אל תכתבי בצידו האחורי של הדף.

11 מספר נקרא "אבהי" אם הוא שונה ספרות, ומתחלק בכל אחת מספרותיו. לדוגמה: 312 הוא מספר אבהי, כי הוא שונה ספרות, ומתחלק ללא שארית ב-1 ב-2 וב-3.

א. מצאי מספר אבהי מרבי בן שלוש ספרות. נמקי מדוע הוא האבהי המרבי.

ב. האם קיים מספר אבהי 8 - ספרתי? אם כן, הדגימי. אם לא- הסבירי מדוע.

ג. אלו שלוש ספרות אינן יכולות להשתתף במספר אבהי בעל 7 ספרות?

ד. מצאי את המספר האבהי המרבי. נמקי!

השם: _____ שם בית הספר: _____



החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ו - שלב שני

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



A large empty rectangular box for writing answers.

שם בית הספר: _____

השם: _____



החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ו - שלב שני

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



A large empty rectangular box intended for the student's solution to the math problem.

שם בית הספר: _____

השם: _____



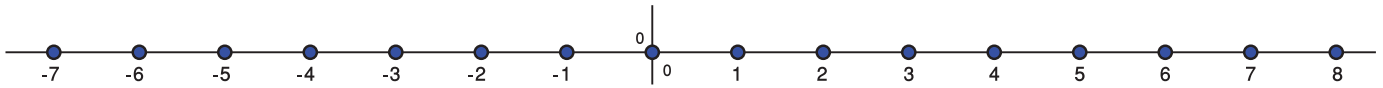
החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ו - שלב שני

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



12 יהי n מספר טבעי. צפרדע "עד דלא ידע" מקפצת על ציר המספרים המאוזן באופן הבא:



היא מתחילה בנקודה 0 וקופצת ימינה, קפיצה באורך מספר טבעי כלשהו בין 1 ל- n (כולל n) לפי בחירתה. בשלב השני היא פונה שמאלה, ושוב מקפצת קפיצה באורך מספר טבעי בין 1 ל- n השונה מגודל הקפיצה הראשונה. היא ממשיכה לקפץ לפי הכללים הבאים:

1. כאשר הצפרדע נמצאת בנקודה שלילית או בנקודה 0, היא קופצת בקפיצה הבאה ימינה, וכאשר היא נמצאת בנקודה חיובית, היא קופצת שמאלה.
 2. אורך הקפיצה הבאה שלה הוא מספר בין 1 ל- n , השונה מאורכי הקפיצות שכבר קפצה עד עכשיו.
 3. בסך הכול היא קופצת בדיוק n קפיצות ואז מסיימת.
- מטרת הצפרדע "עד דלא ידע" היא להגיע בתום n הקפיצות כמה שיותר רחוק ימינה. דוגמה: אם $n=2$, כדאי לצפרדע להתחיל בקפיצה של 2 ימינה, ואז מאחר שנחתה בנקודה 2, עליה לקפוץ שמאלה, הקפיצה שנתרה לה היא רק קפיצה באורך 1, ולכן היא מסיימת בנקודה 1. זוהי סדרת הקפיצות שעשתה הצפרדע: $+2-1$. קל לראות שזו התוצאה הטובה ביותר שהצפרדע יכולה להשיג במקרה זה. בעבור מספר טבעי n נסמן ב- $P(n)$ את הערך המספרי המרבי של הנקודה בציר, שהצפרדע יכולה להגיע אליה לאחר n קפיצות שונות. ראינו כי $P(2)=1$.
- א. מלאי את הטבלה והצביעי על הצעדים.

| n | P(n) | הצעדים |
|---|------|--------|
| 1 | 1 | +1 |
| 2 | 1 | +2-1 |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 8 | | |

ב. הוכיחי כי לכל ערך של n מתקיים $P(n) \leq n$.

ג. מצאי את כל ה- n ים שבעבורם $P(n)$ לא יכול להיות שווה ל- n . הסבירי מדוע.

ד. אם n משאיר שארית 1 כשמחלקים אותו ב-4 ($n=4k+1$), הראי שורה של צעדים המבטיחים ש $P(n)=n$.

ה. עתה הראי כי אם n מתחלק ב-4, גם אז $P(n)=n$.

ו. מצאי מהו $P(n)$ במקרים שנתרו. נמקי!



החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ו - שלב שני

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



A large empty rectangular box for writing the answer.

שם בית הספר: _____

השם: _____



החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ו - שלב שני

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



A large empty rectangular box for writing the answer.

שם בית הספר: _____

השם: _____



החוג למתמטיקה מכללה ירושלים

האולפניאדה המתמטית העולמית תשע"ו - שלב שני

Ulpaniada - The Math Contest for Jewish Girls



A large empty rectangular box for writing the answer.

שם בית הספר: _____

השם: _____